تعريف :

لتكن R حلقة تبديلية ومحايدة نقول ان الزمرة الجمعية التبديلية $(M,+)$ جبر جبر ضمن الحلقة R بمؤثر إذا حققت الشروط

① $(M,+)$ معدول ضمن R

② يوجد كم M عملية ضرب داخلية $(.)$

$$\cdot : M \times M \longrightarrow M$$

$$\forall a,b \in M \; ; \; a.b \in M$$

③ ان الضرب توزيعي مع الجمع من اليمين ومن اليسار

$$\forall a,b,c \in M \quad \begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (a+b)c = ac + bc \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in R \quad \forall a,b \in M \Rightarrow \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

أنواع الجبور :

نقول عن الجبر A انه تجميعي إذا كانت عملية الضرب المعرفة كم A تجميعية

نقول عن الجبر A انه تبديلي اذا كانت عملية الضرب المعرفة كم A تبديلية

نقول عن الجبر A انه واحدي اذا وجد عنصر حيادي بالنسبة لل $(.)$

نقول عن الجبر A انه جبر قسمة اذا كان لكل عنصر غير الصفر في A مقلوب (بالنسبة للضرب)

مبرهنة :

ليكن A جبر ضمن الحلقة التبديلية والواحدية R عندئذ

$$\forall a \in A \quad 0.a = 0$$

$$\forall r \in R \quad r.0 = 0$$

$$\forall m \in A \; ; \; (-1)m = -m$$

البرهان :

① $$0.a = (0+0)a = 0.a + 0.a$$

نضيف النظير للطرفين

$$-0.a + 0.a = -0.a + 0.a + 0.a$$

$$\Rightarrow 0 = 0.a$$

③
$$r.0 = r(0+0) = r.0 + r.0$$
$$-r.0 = -r.0 + r.0 + r.0$$
$$\Rightarrow 0 = r.0$$

④ لنبين $0 = 1 - 1 = 1 + (-1)$ في الحلقة R نضرب بـ m من اليمين

$$(-1+1)m = 0.m$$
$$(-1)m + 1.m = 0.m$$
$$(-1)m + m = 0$$

نضيف النظير للطرفين

$$(-1)m + m - m = 0 - m$$
$$(-1)m = 0 - m \Rightarrow (-1)m = -m$$

أمثلة:

① كل حلقة تبديلية وواحدية تشكل جبراً فوقها من اليمين ومن اليسار بآن معاً والعملية الخارجية هي الضرب في الحلقة R

العملية الخارجية $R \times R \longrightarrow R$

العملية الداخلية $R \times R \longrightarrow R$

② كل زمرة جمعية تبديلية $(G,+)$ تشكل موديولاً فوق حلقة الأعداد الصحيحة حيث العملية الخارجية

$$Z \times G \longrightarrow G$$
$$(n,g) \longrightarrow ng$$

$$ng \begin{cases} \underbrace{g + g + \dots + g}_{n \text{ مرة}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{-n \text{ مرة}} & n < 0 \end{cases}$$

③ كل حلقة واحدية R تشكل جبراً فوق حلقة الأعداد الصحيحة Z

$(R,+,\cdot)$ حلقة

$(R,+)$ زمرة جمعية تبديلية تشكل موديولاً فوق Z حيث أن عملية الضرب الخارجية هي العملية الواردة في المثال ② والداخلية هي عملية الضرب المعرفة في R

(٤) لتكن R حلقة تبديلية ومحايدة ولنفرض أن $M_n(R)$ مجموعة جميع المصفوفات المربعة من المرتبة n والتي عناصرها من الحلقة R أي أن

من المعلوم أن

$$M_n(R) = \{a_{ij} : a_{ij} \in R\}$$

وأن الثنائية $(M_n(R), +)$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات

وعلى الثنائية $(M_n(R), \cdot)$ تشكل مودول فوق الحلقة R بالنسبة لعملية الضرب الخارجي

حيث

$$R \times M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$$

$$(r, A) \longrightarrow r \cdot A$$

$$A = a_{ij}$$

$$rA = r a_{ij}$$

يعني ضرب العدد r بجميع عناصر المصفوفة سطر أو عمود

فضلاً عن ذلك المودول $M_n(R)$ تشكل جبراً فوق R بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات

تعريف:

لتكن A جبراً فوق الحلقة R نتحدث عن المجموعة الجزئية غير الخالية B في A : أنها تشكل جبراً جزئياً في A إذا كانت B تشكل جبراً بحد ذاتها بالنسبة للعمليات المعرفة في A

(مع العلم أن تكون B نفس عمليات A)

مبرهنة:

ليكن A جبراً فوق الحلقة التبديلية والواحدية R ، B مجموعة جزئية غير خالية في A عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة

أ - B جبر جزئي في A

ب - B تحقق الشروط الآتية

$$\forall \alpha, \beta \in R \ , \ x, y \in B$$

$$\alpha x + \beta y \in B$$

$$xy \in B$$

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$

بما أن B جبر جزئي في A فهو جبر بحد ذاته وبالتالي

$\alpha x + \beta y \in B$

ومنه $x, y \in B$

$1 \Leftarrow 2$

من أجل $\alpha = \beta = 1$ عندئذ $x + y \in B$ مغلقة بالنسبة لعملية الجمع

ومن أجل

$\alpha = +1$ و $\beta = -1$ فإن

$x - y \in B$

$\Leftarrow$ B تشكل زمرة جزئية في A وبالتالي فهي زمرة بحد ذاتها

الجمع في A تبديلي $\Leftarrow$ الجمع في B تبديلي لأن

$\alpha x + \beta y \in B \quad \forall \alpha, \beta \in R \qquad x, y \in B$

فإن تشكل مودول جزئي فوق R وبالتالي فهي مودول بحد ذاته وأيضاً لأن

$x \cdot y \in B \quad \forall x, y \in B$

فإن الضرب (.) تشكل عملية داخلية في B وهذه العملية تحقق جميع الشروط الواردة في تعريف

الجبر $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

وبالتالي B جبر جزئي

العنصر الجامد :

- هو العنصر الذي مربعه هو نفسه $e^2 = e$
- الحلقة الجزئية الوحيدة هي eRe ، $e \in R$
- بالحلقات الجزئية نعني أن الحلقة واحدية

المثاليات :

ليكن A جبراً فوق الحلقة التبديلية والواحدية R وليكن B جبراً جزئياً وغير خالية في A نقول أن B تشكل مثالية يسارية في A إذا تحققت

1- B معدول جزئي في A

2- $\forall a\in A \quad b\in B \Rightarrow a.b \in B$

ونقول أن B تشكل مثالية يمنية في A إذا حققت

1- B معدول جزئي في A

2- $\forall a\in A \quad b\in B \quad b.a \in B$

ونقول عن B إنه مثالي في A إذا كان مثالية يمينية ويسارية في A بآن واحد

مبرهنة

في أي جبر كل مثالية يسارية (يمنية) تشكل جبراً جزئياً منه

البرهان:

ليكن A جبراً على R و B مثالية يسارية فيه وعندئذ

① B معدول جزئي في A ⇐ فهو معدول بحد ذاته

② $\forall a\in A ,\ b\in B \Rightarrow ab \in B$

حسب تعريف الجبريات B جبر بحد ذاته ⇐ B جبر جزئي

مبرهنة

تقاطع مجموعة غير خالية من المثاليات اليسارية (اليمنية) في الجبر A هو مثالي يساري (أو يميني) في A

مجموع معدولين جزئيين من الشكل

$$A+B = \{ b+d : b\in B ,\ d\in D \}$$

علاقة التكافؤ تحقق انعكاسية، تناظرية، متعدية

علاقة الترتيب تحقق انعكاسية، تخالفية، متعدية

علاقة التكافؤ:

لتكن P مجموعة غير خالية لنعتبر كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $P\times P$ علاقة على P

علاقة التكافؤ :

لتكن P مجموعة غير خالية نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $P\times P$ علاقة على P

تعريف :

لتكن P مجموعة غير خالية، ρ علاقة ثنائية على P نقول عن العلاقة ρ إنها انعكاسية إذا حققت

$$\forall a \in P \quad a\rho a \overset{\text{يكافئ ذلك}}{\Leftrightarrow} (a,a)\in\rho$$

ونقول عن العلاقة ρ إنها تناظرية إذا حققت

$$\forall a,b\in P \quad a\rho b \Rightarrow b\rho a$$

ومنه يكافئ أن $(a,b)\in\rho \Rightarrow (b,a)\in\rho$

نقول عن العلاقة ρ تخالفية إذا حققت

$$\forall a,b \in P \quad a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a=b$$

ونقول عن العلاقة ρ إنها متعدية إذا حققت

$$\forall a,b,c\in P : a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$$

ونقول عن العلاقة ρ إنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية، تناظرية ومتعدية وينتج عن علاقة التكافؤ صفوف تكافؤ

صفوف التكافؤ: مجموعة العناصر التي ترتبط بهذا العنصر

تعريف: لتكن ρ علاقة معرفة على المجموعة P ولنفرض أن $a\in P$ نسمي المجموعة

$[a] : \bar{a} = \{x ; x\in P ; a\rho x\}$

بصف تكافؤ العنصر a

والمجموعة غير خالية لأن ρ علاقة تكافؤ [illegible] الانعكاسية محققة على الأقل العنصر يرتبط بنفسه

وهو يشكل مجموعة جزئية من P

ونسمي المجموعة

$$P/\rho = \{\bar{a} \; ; \; a \in P\}$$

مجموعة الخارج :

• مجموعة عرفنا عليها علاقة تكافؤ أي تجزئ المجموعة إلى مجموعات جزئية وغير متقاطعة واجتماعها يعطي المجموعة كلها

نتيجة :

لتكن ρ علاقة تكافؤ معرّفة على المجموعة P إن مجموعة الخارج

$$P/\rho = \{\bar{a} \, , \, a \in P\}$$

تحقق الشروط الآتية

$$\forall a \in P \; ; \; \bar{a} \neq \phi \quad \bar{a} \subset P$$ (1)

$$\forall a, b \in P$$ (2)

عندئذٍ إما

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \text{أو} \quad \bar{a} \cap \bar{b} = \phi$$

$$P = \bigcup_{\bar{a} \in P/\rho} \bar{a}$$ (3)

التابع , التطبيق هو علاقة تكافؤ